10

Primena izvoda

Lopitalovo pravilo

- Granične vrednosti mogu biti različitog neodređenog tipa

  $$„\frac{0}{0}", „\frac{\infty}{\infty}", „0 \cdot \infty", „\infty - \infty", „1^{\infty}", „0^0", „\infty^0".$$

  U ovim slučajevima pogodno je primeniti **Lopitalovo pravilo**.

- **Lopitalovo pravilo (teorema).** Neka su funkcije f i g neprekidne u nekoj okolini U tačke a i imaju izvod za sve x iz te okoline sem eventualno u tački a i važi $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in U \setminus \{a\}$, gde je a broj ili simbol beskonačnosti[1] $(a = \pm\infty)$.
  Ako $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (ili $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$) i postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tada postoji i $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi

  $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

- Pokažimo da se i ostali neodređeni izrazi mogu transformisati na oblike „$\frac{0}{0}$" ili „$\frac{\infty}{\infty}$", koji su pogodni za primenu Lopitalovog pravila.

  1° „$0 \cdot \infty$". Pri izračunavanju granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a} (f_1(x) \cdot f_2(x))$, gde je $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$, možemo izraz $f_1(x) \cdot f_2(x)$ zapisati na sledeći način

  $$f_1(x) \cdot f_2(x) = \frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}$$

  i tako ga svesti na oblik „$\frac{0}{0}$".

[1] Ako je $a = \infty(-\infty)$ onda se pod okolinom U podrazumeva skup svih brojeva x tako da je $x > \frac{1}{\varepsilon}$ $(-x > \frac{1}{\varepsilon})$, za neko $\varepsilon > 0$.

2° „$\infty - \infty$". Pri izračunavanju $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) - f_2(x))$, gde je $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \infty$, možemo postupiti na sledeći način:
Kako je
$$f_1(x) - f_2(x) = f_1(x)\left(1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right),$$
ako $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to 1$ kada $x \to a$, dobijamo slučaj 1°. Ako $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ ne teži ka 1 $(x \to a)$, odnosno $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to \infty$ ili $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to c$, $c \neq 1$ $(x \to a)$, onda dobijamo određene izraze „$\infty \cdot \infty$" $= \infty$ ili „$\infty \cdot (1-c)$" $= \infty$.

3° „1^∞", „0^0", „∞^0". Ti oblici se pomoću jednakosti
$$[f_1(x)]^{f_2(x)} = e^{f_2(x)\cdot \ln f_1(x)}$$
svode na slučaj 1°. Dakle, pri računanju izraza $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)^{f_2(x)}$ prvo računamo $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\ln f_1(x)$.

- U zadacima ćemo iznad znaka jednakosti uvek naznačiti o kom tipu granične vrednosti se radi. Primena Lopitalovog pravila, odnosno korišćenje jednakosti $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, obeležavaćemo sa $\left(L, \frac{0}{0}\right)$ ili $\left(L, \frac{\infty}{\infty}\right)$ u zavisnosti od tipa granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. Čitaocu se ostavlja da proveri da li su uslovi za primenu ovog pravila zadovoljeni.

Tejlorova i Maklorenova formula

- Neka je f neprekidna funkcija koja ima neprekidne sve izvode do izvoda reda n na intervalu $[a,b]$ i ima izvod reda $n+1$ na intervalu (a,b). Tada za $x, x_0 \in [a,b]$ važi **Tejlorova formula**
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \tag{10.1}$$
gde je
$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$,
$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,
$\varepsilon = x_0 + \theta\cdot(x-x_0)$ i $0 < \theta < 1$
(drugim rečima, ε je neka tačka između x_0 i x).

  Polinom T_n se naziva **Tejlorov polinom** stepena n za funkciju f u okolini tačke x_0, i kaže se da on aproksimira funkciju f u okolini tačke x_0 sa **greškom (ostatkom)** R_n.

  Kažemo da je, za svaku tačku x iz okoline tačke x_0, vrednost $f(x)$ funkcije f u tački x aproksimirana sa $T_n(x)$, i pišemo $f(x) \approx T_n(x)$.

- Za $x_0 = 0$ dobija se **Maklorenova**

$$f(x) = M_n(x) + R_n(x), \tag{10.2}$$

$M_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}x^{n+1},$

gde je $\varepsilon = \theta \cdot x$ i $0 < \theta < 1$ (ε je između 0 i x).

- Prema Maklorenovoj formuli dobija se:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \\
& R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x}; \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x), \\
& R_{2k}(x) = \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cos \theta x; \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}(x), \\
& R_{2k+1}(x) = \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2}}{(2k+2)!} \cos \theta x; \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x), \\
& R_n(x) = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}; \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + R_n(x), \\
& R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

(*Napomena:* $\binom{\alpha}{n} \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!},\ \binom{\alpha}{0} \overset{\text{def}}{=} 1,\ n \in \mathbf{N},\ \alpha \in \mathbf{R}$)

Zadaci

Lopitalovo pravilo

1. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$. **b**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\arcsin 5x}$. **d**) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\ln x}$.

Rešenje.

Ove granične vrednosti su oblika „$\frac{0}{0}$” i možemo direktno primeniti Lopitalovo pravilo.

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{\frac{-1}{e-x}+1}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}+1)(e-x)}{e^x(e-x-1)}=\frac{2e}{e-1}.$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2.$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{\arcsin 5x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2}{\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot 5}=\frac{2}{5}.$$

d) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\ln x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{\frac{1}{x}}=1.$$

2. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$. **b**) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}})$. **d**) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-x\cdot e^{\frac{1}{x-2}})$.

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Rešenje.

U zadacima pod *a*) i *b*) imamo granične vrednosti oblika „$\frac{\infty}{\infty}$”. Može se direktno primeniti Lopitalovo pravilo.

a) $$\lim_{x\to a}\frac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}=\lim_{x\to a}\cos x\cdot\lim_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}\overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$=\cos a\cdot\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{1}{e^x-e^a}\cdot e^x}=\cos a\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{e^x}\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}\overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$=\cos a\cdot\frac{1}{e^a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^x}{1}=\cos a.$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}\overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0.$$

c) Pre primene Lopitalovog pravila, neodređeni izraz oblika „$0\cdot\infty$" svodimo na oblik „$\frac{\infty}{\infty}$".

$$\lim_{x\to 0}x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\overset{(0\cdot\infty)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{2}{x^3}}=\infty.$$

Granične vrednosti u zadacima pod *d*) i *e*) su oblika „$\infty-\infty$". Faktorizacijom taj oblik svodimo na „$0\cdot\infty$" a zatim na oblik „$\frac{\infty}{\infty}$", nakon čega primenjujemo Lopitalovo pravilo.

d) $$\lim_{x\to-\infty}(x-x\cdot e^{\frac{1}{x-2}})\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}x\cdot(1-e^{\frac{1}{x-2}})\overset{(\infty\cdot 0)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x-2}}}{\frac{1}{x}}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{(x-2)^2}=1\cdot(-1)=-1.$$

e) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)\overset{(\infty\cdot 0)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}-1}{x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{2\sin x\cos x}=0.$$

3. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$. **b**) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$. **c**) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg}x)^x$.
d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$. **e**) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$. **f**) $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)^{\operatorname{ctg}x}$.

Rešenje.

a) Granična vrednost je oblika „0^0".

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = A$. Tada je

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} x\ln x \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Na osnovu toga je

$$\ln A = 0 \;\Rightarrow\; A = e^0 = 1.$$

b) Granična vrednost je oblika „0^0”.

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = A$. Tada je

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \ln x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln x \overset{(0\cdot\infty)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot \cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x\cdot \cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 0\cdot 1 = 0.$$

Na osnovu toga je A,

$$\ln A = 0 \;\Rightarrow\; A = e^0 = 1.$$

c) Granična vrednost je oblika „∞^0”.

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^x = A$. Tada imamo

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^x = \lim_{x\to 0^+} x \ln \operatorname{ctg} x \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\frac{1}{x}} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\sin x\cdot \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\cos x} = 0.$$

Prema tome je

$$\ln A = 0 \;\Rightarrow\; A = e^0 = 1.$$

d) Granična vrednost je oblika „∞^0”.

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = A$. Tada imamo

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\ln x} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x\cdot\cos x} = -1.$$

Na osnovu toga je

$$\ln A = -1 \;\Rightarrow\; A = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

e) Granična vrednost je oblika „1^∞”.

Neka je $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = A$. Tada je

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Prema tome je

$$\ln A = 1 \;\Rightarrow\; A = e.$$

f) Granična vrednost je oblika „1^∞”.

Neka je $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)^{\operatorname{ctg} x} = A$. Tada je

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0}(3x+1)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x \ln(3x+1)) \overset{(\infty\cdot 0)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(3x+1)}{\operatorname{tg} x} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{3x+1}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 3.$$

Prema tome je

$$\ln A = 3 \;\Rightarrow\; A = e^3.$$

Zadaci za samostalni rad

1. Izračunati graničnu vrednost

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$. $\quad b)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$ $\quad (a, b > 0)$.

$c)$ $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$. $\quad d)$ $\lim\limits_{x\to a} (\arcsin(x-a) \cdot \operatorname{ctg}(x-a))$.

Rezultat: $a)$ 1. $\quad b)$ 1. $\quad c)$ 1. $\quad d)$ 1.

2. Izračunati graničnu vrednost

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$. $\quad b)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

$c)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Rezultat: $a)$ e^2. $\quad b)$ e^2. $\quad c)$ $\frac{1}{e}$.

11

Ispitivanje funkcija

Kod ispitivanja funkcije, potrebno je uraditi sledeće:

- Odrediti oblast definisanosti funkcije.
- Ispitati specijalna svojstva (parnost, neparnost, periodičnost).
- Odrediti nule i znak.
- Odrediti intervale monotonosti[1] i ekstremne tačke.
  - Uslovi monotonosti.

    Neka je $D \subseteq \mathbf{R}$ i $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$. Ako za svako $x \in (a, b) \subseteq D$, $f'(x)$ postoji i

    $f'(x) > 0$, onda je funkcija f rastuća
    $f'(x) \geq 0$, onda je funkcija f neopadajuća
    $f'(x) = 0$, onda je funkcija f konstantna
    $f'(x) \leq 0$, onda je funkcija f nerastuća
    $f'(x) < 0$, onda je funkcija f opadajuća
    na (a, b).
  - Neka je f definisana u nekoj okolini x_0 u kojoj dostiže ekstremnu vrednost. Tada ili $f'(x_0)$ ne postoji ili je $f'(x_0) = 0$.
    Tačke domena funkcije u kojima $f'(x)$ ne postoji ili $f'(x) = 0$, nazivamo **kritičnim tačkama** i one predstavljaju moguće tačke u kojima funkcija dostiže ekstremnu vrednost.
  - Neka je f neprekidna u x_0. Neka je f diferencijabilna funkcija u nekoj okolini U tačke x_0, osim eventualno u tački x_0.
    Ako je $f'(x) > 0$ za $x \in U \cap (-\infty, x_0)$ i $f'(x) < 0$ za $x \in U \cap (x_0, +\infty)$, onda funkcija u tački x_0 ima **lokalni maksimum**.
    Ako je $f'(x) > 0$ za $x \in U \cap (x_0, +\infty)$ i $f'(x) < 0$ za $x \in U \cap (-\infty, x_0)$, onda funkcija u tački x_0 ima **lokalni minimum**.

[1] Definicija monotonosti i ekstremne vrednosti funkcije može se videti u [3].

Drugim rečima i ne tako precizno, ako $f'(x)$ menja znak kada x prolazi kroz x_0, onda je to tačka u kojoj funkcija dostiže ekstremnu vrednost.

- Odrediti konveksnost i prevojne tačke.
  - Neka funkcija $f : (a,b) \longrightarrow \mathbf{R}$ ima drugi izvod na (a,b). $f(x)$ je **konkavna (konveksna)** na (a,b) ako i samo ako je $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) za $x \in (a,b)$.
  - Neka je f definisana u nekoj okolini U tačke x_0 i u toj tački ima konačan ili beskonačan prvi izvod i neprekidna je. Tačka $(x_0, f(x_0))$ naziva se **prevojnom tačkom** grafika funkcije f, ako je f konveksna (konkavna) na skupu $\{x \in U |\ x > x_0\}$ i konkavna (konveksna) na skupu $\{x \in U |\ x < x_0\}$.

    Neka funkcija f ima prvi izvod u nekoj okolini U tačke x_0 i ima drugi izvod u $U \setminus \{x_0\}$. Ako $f''(x)$ menja znak pri prolazu argumenta kroz tačku x_0, onda je $(x_0, f(x_0))$ prevojna tačka grafika funkcije f.
  - Neka funkcija f u x_0 ima sve izvode zaključno sa n-tim($n \geq 2$) pri čemu je

    $$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \quad \text{i}$$
    $$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

    Ako je $n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}$), onda funkcija ima ekstrem u tački x_0 i to za

    $$f^{(n)}(x_0) > 0, \quad \text{lokalni minimum;}$$
    $$f^{(n)}(x_0) < 0, \quad \text{lokalni maksimum.}$$

    Ako je $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbf{N}$) onda je x_0 prevojna tačka.

- Naći asimptote.
  - Prava $x = x_0$ je **vertikalna asimptota** grafika funkcije ako je

    $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

  - Prava $y = kx + n$ je **kosa asimptota** grafika funkcije ako postoje $k \in \mathbf{R}$ i $n \in \mathbf{R}$ tako da je

    $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{i} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = n,$$

    ili

    $$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{i} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = n.$$

    Specijalno za $k = 0$ dobija se prava $y = n$, koja je paralelna sa x-osom i naziva se **horizontalna asimptota**.

- Odrediti ostale specifičnosti grafika.

- Nacrtati grafik.

Zadaci

1. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**
$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$, jer deljenje sa nulom nije definisano, pa mora da važi
$$x^2 - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1 \ \wedge \ x \neq -1.$$
- Funkcija je neparna, jer važi
$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = -\frac{x}{x^2-1} = -f(x).$$
Dakle, grafik funkcije f je simetričan u odnosu na koordinatni početak.
- Nula funkcije f je $x = 0$. Znak funkcije je prikazan u tablici.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

- Prvi izvod funkcije je
$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}.$$
Vidimo da je $f'(x) < 0$ za svako $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$, a to znači da je f opadajuća na čitavom domenu D.
- Drugi izvod funkcije je
$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$$
$f''(x) = 0$ za $x = 0$. Tačka $A(0,0)$ je moguća prevojna tačka. Odredimo znak drugog izvoda:
$$f''(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ (x > 0 \ \wedge \ x^2 - 1 > 0) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ x^2 - 1 < 0) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \ \vee \ x \in (-1, 0).$$
Dakle, funkcija je konkavna ($\smile$) na skupu $(-1,0) \cup (1, \infty)$, a konveksna ($\frown$) na skupu $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ i tačka $A(0,0)$ je prevojna tačka grafika funkcije f.

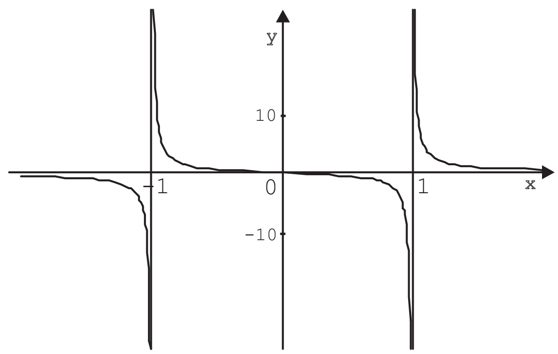
- Asimptote.

  Kako je $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$,

  i kako je $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$,

  to su prave $x = 1$ i $x = -1$ vertikalne asimptote funkcije f.

  Kako je
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0,$$
  to je prava $y = 0$, tj. x-osa horizontalna asimptota funkcije.



Slika 11.1: Grafik funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

2. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**
$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Lako se vidi da je tačka $x = 1$ jedina nula funkcije f.

  Odredimo znak funkcije.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+8)}{(x+2)^3}, \quad x \in D.$$

Nule prvog izvoda su $x = 1$ i $x = -8$ a to su ujedno i kritične tačke.

Odredimo znak prvog izvoda, odnosno monotonost funkcije.

	$(-\infty, -8)$	$(-8, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Iz tablice se može zaključiti da u tački $x = -8$ funkcija ima lokalni maksimum, $A(-8, -\frac{81}{4})$. Tačka $x = 1$ nije ekstremna tačka.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{54(x-1)}{(x+2)^4}, \quad x \in D.$$

$f''(x) = 0$ za $x = 1$, to je tačka $P(1, 0)$ moguća prevojna tačka grafika funkcije f.

Odredimo znak drugog izvoda, odnosno koveksnost funkcije.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	konveksna ($\frown$)	konveksna ($\frown$)	konkavna ($\smile$)

Sada možemo zaključiti da je tačka $P(1, 0)$ prevojna tačka grafika funkcije f.

- Asimptote.

Funkcija f nije definisana u tački $x = -2$ i kako

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = -\infty,$$

to je prava $x = -2$ vertikalna asimptota funkcije f.

Funkcija f nema horizotalnu asimptotu, jer je

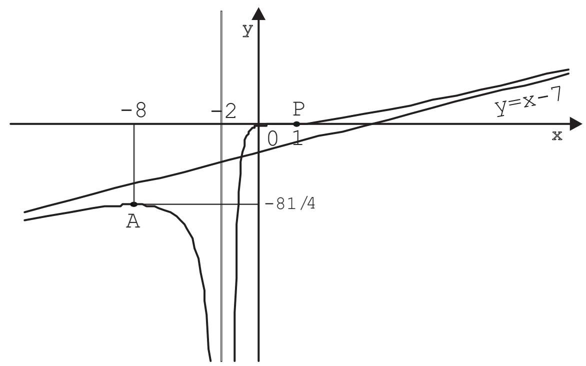
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = -\infty.$$

Funkcija f ima kosu asimptotu $y = x - 7$, jer je

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+2)^2} = 1 \quad \text{i}$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-7x^2 - x - 1}{(x+2)^2} = -7.$$



Slika 11.2: Grafik funkcije $f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$.

3. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije:**

$$f(x)=\sqrt{(x^2-9)^3}.$$

Rešenje.

- Da bi kvadratni koren bio definisan, mora da važi

$$(x^2-9)^3 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2-9 \geq 0 \;\Leftrightarrow |x| \geq 3,$$

odnosno domen funkcije $D=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

- Funkcija je parna, zaista

$$f(-x)=\sqrt{((-x)^2-9)^3}=\sqrt{(x^2-9)^3}=f(x).$$

Dakle, grafik funkcije je simetričan u odnosu na y-osu.

- Nule funkcije f se određuju iz $f(x)=0$, odnosno

$$x^2-9=0 \;\Leftrightarrow\; x=3 \text{ ili } x=-3.$$

Nule su dakle u tačkama $x=3$ i $x=-3$.

Pošto je kvadratni koren nenegativna funkcija na domenu, nije teško videti da je funkcija f nenegativna tj. $f(x)\geq 0$ za svako $x\in D$.

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x^2-9)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=3x\sqrt{x^2-9},\; x\in D.$$

Odredićemo nule prvog izvoda:

$$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 3x\sqrt{x^2-9}=0 \;\Leftrightarrow\; (x=0 \text{ ili } x=3 \text{ ili } x=-3).$$

Sledi da su kritične tačke $x = 3$ i $x = -3$ (nulu smo isključili, jer $0 \notin D$).

Sada ćemo odrediti znak prvog izvoda, odnosno monotonost:

	$(-\infty, -3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Lako je zaključiti da su tačke $A(-3, 0)$ i $B(3, 0)$ lokalni minimumi date funkcije.

- Drugi izvod funkcije f je

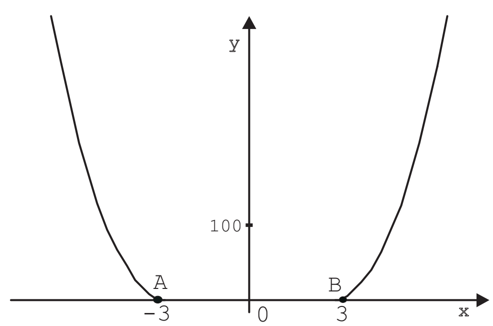
$$f''(x) = 3 \cdot \sqrt{x^2 - 9} + 3x\frac{1}{2}(x^2 - 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3\sqrt{x^2 - 9} + 3x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}},$$

$$f''(x) = 3 \cdot \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 9}}, \quad x \in D \setminus \{-3, 3\}.$$

Odredićemo nule drugog izvoda

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \notin D.$$

Dakle, funkcija nema prevojnih tačaka, $f''(x) > 0$ za svako $x \in D \setminus \{-3, 3\}$, odnosno $f(x)$ je konkavna ($\smile$) na skupu $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.



Slika 11.3: Grafik funkcije $f(x) = \sqrt{(x^2 - 9)^3}$.

- Asimptote.

Funkcija nema vertikalnu asimptotu, jer je neprekidna u svim tačkama domena.

Funkcija nema kosu asimptotu, jer je

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{(x^2 - 9)^3}}{x} = \pm\infty.$$

Funkcija nema ni kosu ni horizontalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{(x^2-9)^3} = +\infty.$$

- Odredićemo još ugao α koji tangenta grafika funkcije f zaklapa sa pozitivnim delom x-ose u tački $x = 3$ ($x = -3$).

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(3) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0.$$

4. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = x\sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nule funkcije.

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x = 0 \quad \vee \quad x+1 = 0)$$

dakle, $x = 0$ i $x = -1$ su nule funkcije.

Znajući da je $(x+1)^2 \geq 0$ za svako $x \in D$, jasno je da je $f(x) \leq 0$ za $x \in (-\infty, 0)$ i $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$.

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{5x+3}{3\sqrt[3]{x+1}}, \quad x \in D \setminus \{-1\}.$$

Nule prvog izvoda:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 5x+3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{3}{5}.$$

Kako $f'(-1)$ ne postoji, sledi da su $x = -1$ i $x = -\frac{3}{5}$ kritične tačke funkcije.

Odredimo znak prvog izvoda.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{3}{5}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija ima lokalni maksimum u tački $x = -1$, $A(-1, 0)$ i lokalni minimum u tački $x = -\frac{3}{5}$, $B(-\frac{3}{5}, f(-\frac{3}{5}))$, $f(-\frac{3}{5}) \approx -0.33$.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{10x + 12}{9\sqrt[3]{(x+1)^4}}, \quad x \in D \setminus \{-1\}.$$

Odredićemo nule drugog izvoda:

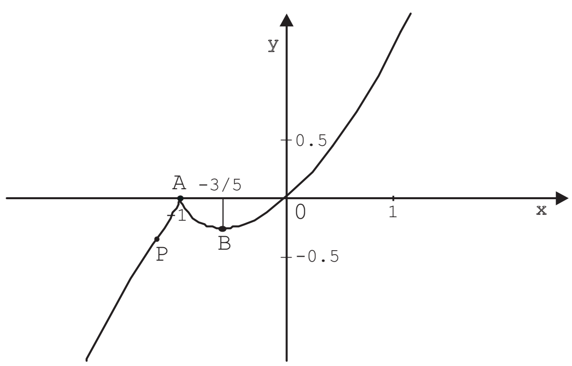
$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 10x + 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{6}{5}.$$

Moguće prevojne tačke su $x = -\frac{6}{5}$ i $x = -1$.

Znak drugog izvoda:

	$(-\infty, -\frac{6}{5})$	$(-\frac{6}{5}, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	konveksna $(\frown)$	konkavna $(\smile)$	konkavna $(\smile)$

Sada možemo zaključiti da je tačaka $P(-\frac{6}{5}, f(-\frac{6}{5}))$ prevojna tačka grafika funkcije f, $f(-\frac{6}{5}) \approx -0.41$.



Slika 11.4: Grafik funkcije $f(x) = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

- Asimptote.

Funkcija je definisana i neprekidna nad skupom $\mathbf{R}$, te zbog toga nema vertikalnu asimptotu.

Funkcija f nema horizotalnu asimptotu jer je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{(x+1)^2} = \pm\infty.$$

Funkcija f nema kosu asimptotu, zato što je

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x+1)^2} = +\infty.$$

5. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = x\, e^{\frac{1}{x-2}}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nula funkcije f je $x = 0$. Odredićemo znak funkcije.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

- Prvi izvod fukcije f je

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}, \;\; x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}.$$

Odredimo nule prvog izvoda:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 5x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow x = 1 \;\vee\; x = 4.$$

Kritične tačke funkcije f su $x = 1$ i $x = 4$. Znak prvog izvoda i monotonost funkcije je prikazana u tablici.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Dakle, f monotono raste na skupu $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$, a monotono opada na skupu $(1, 2) \cup (2, 4)$.

- Drugi izvod funkcije je

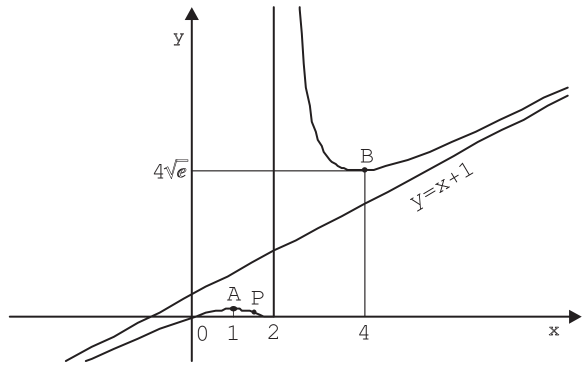
$$f''(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{5x - 8}{(x-2)^4}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}.$$

$f''(x) = 0$ za $x = \frac{8}{5}$. Analizirajmo znak drugog izvoda.

	$(-\infty, \frac{8}{5})$	$(\frac{8}{5}, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	konveksna ($\frown$)	konkavna ($\smile$)	konkavna ($\smile$)

Sada možemo zaključiti da je prevojna tačka grafika funkcije f je $P(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}e^{\frac{-5}{2}})$.

Može se ekstremna vrednost odrediti i preko drugog izvoda pa ćemo u ovom zadatku to uraditi.



Slika 11.5: Grafik funkcije $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$.

$f''(1) = -\frac{3}{e} < 0$, tako da u tački $A(1, \frac{1}{e})$ funkcija ima lokalni maksimum.

$f''(4) = \frac{3}{4}\sqrt{e} > 0$, tako da u tački $B(4, 4\sqrt{e})$ funkcija ima lokalni minimum.

- Asimptote.

Kako je

$$\lim_{x\to 2^+} x\, e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty,$$

prava $x = 2$ je vertikalna asimptota funkcije f. Sa druge strane važi

$$\lim_{x\to 2^-} x\, e^{\frac{1}{x-2}} = 0$$

što znači da kad $x \to 2^-$ grafik funkcije se „približava" tački $(2, 0)$.

Kako je

$$\lim_{x\to +\infty} x\, e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to -\infty} x\, e^{\frac{1}{x-2}} = -\infty,$$

to funkcija nema horizontalnih asimptota.

Kako je

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\, e^{\frac{1}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = 1 \quad \text{i}$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot (e^{\frac{1}{x-2}} - 1) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x-2}{x} = 1,$$

to je prava

$$y = x + 1$$

kosa asimptota funkcije f kada $x \to \pm\infty$.

6. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = |x+1|\, e^{-\frac{1}{x}}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nule funkcije:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1.$$

Jasno je da $f(x) > 0$ za svako $x \in D$.

- Pošto je

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-\frac{1}{x}}, & x > -1, x \neq 0 \\ -(x+1)e^{-\frac{1}{x}}, & x < -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

lako se dobija prvi izvod,

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right), & x > -1, x \neq 0 \\ -e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right), & x < -1. \end{cases}$$

Ispitajmo postojanje prvog izvoda u tački $x = -1$. Odredimo levi izvod

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} -e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right) = e$$

a zatim, desni izvod

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right) = -e$$

Kao što vidimo levi i desni izvodi u tački $x = -1$ nisu jednaki, a to znači da ne postoji prvi izvod u $x = -1$.

Odredimo nule prvog izvoda.

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(1 + \frac{x+1}{x^2} = 0 \;\wedge x \neq -1 \;\wedge\; x \neq 0\right) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x+1}{x^2} = 0, \;\; x \neq -1, \; x \neq 0.$$

Kako je $x^2 + x + 1 \neq 0$ za svako $x \in \mathbf{R}$, sledi da prvi izvod nema nula. Jedina kritična tačka je $x = -1$.

Odredimo znak prvog izvoda:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Sada možemo zaključiti da je tačka $x = -1$ lokalni minimum funkcije f, na grafiku to je tačka $A(-1, 0)$.

- Drugi izvod funkcije f je

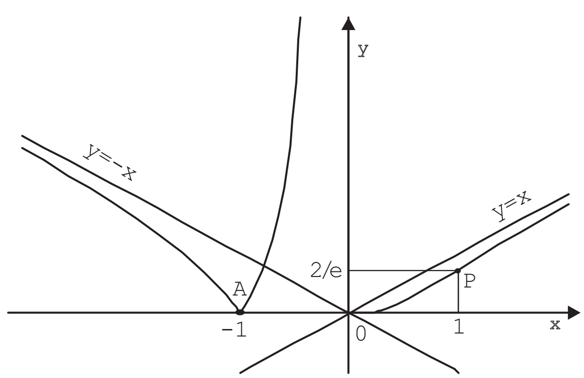
$$f''(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{-x+1}{x^4}\right), & x > -1, x \neq 0 \\ -e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{-x+1}{x^4}\right), & x < -1 \end{cases}$$

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$, tako da je to, moguća prevojna tačka.

Odredimo znak drugog izvoda:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	konveksna $(\frown)$	konkavna $(\smile)$	konkavna $(\smile)$	konveksna $(\frown)$

Drugi izvod menja znak prolazeći kroz tačke $x = -1$ i $x = 1$. Samo je tačka $x = 1$ prevojna tačka funkcije, $P(1, \frac{2}{e})$, zato što prvi izvod ne postoji u tački $x = -1$.



Slika 11.6: Grafik funkcije $f(x) = |x+1|\, e^{-\frac{1}{x}}$.

- Asimptote.

  Funkcija f nije definisana u tački $x = 0$ i kako je
  $$\lim_{x\to 0^-} |x+1|\, e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$
  to je prava $x = 0$ vertikalna asimptota funkcije f. A sa druge strane je
  $$\lim_{x\to 0+} |x+1|\, e^{-\frac{1}{x}} = 1\cdot 0 = 0. \tag{11.1}$$
  Funkcija f nema horizontalnu asimptotu, jer je
  $$\lim_{x\to+\infty} |x+1|\, e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^{\frac{1}{x}}} = +\infty$$
  i
  $$\lim_{x\to-\infty} |x+1|\, e^{\frac{-1}{x}} = +\infty.$$
  Kose asimptote.
  $$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right) = 1,$$
  $$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -1,$$
  $$n_1 = \lim_{x\to+\infty} \left[(x+1)e^{\frac{-1}{x}} - x\right] = 1 + \lim_{x\to+\infty} x(e^{-\frac{1}{x}} - 1) =$$
  $$= 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} x^{-2}}{-x^{-2}} = 1 - 1 = 0,$$
  $$n_2 = \lim_{x\to-\infty} \left[(-x-1)e^{-\frac{1}{x}} + x\right] = -1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{-\frac{1}{x}} =$$
  $$= -1 + 1 = 0.$$
  Dakle, imamo dve kose asimptote
  $$y_1 = x \text{ (kada } x \to +\infty) \quad \text{i} \quad y_2 = -x \text{ (kada } x \to -\infty).$$

- Kako važi (11.1), odredićemo još ugao α između tangente funkcije f kada $x \to 0^+$ i pozitivnog dela x-ose
  $$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.$$

7. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**
$$f(x) = \ln\frac{x+3}{1-x}.$$

Rešenje.

- Funkcija f je definisana za $\frac{x+3}{1-x} > 0$. Domen date funkcije je $D = (-3, 1)$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nule funkcije f se određuju rešavanjem jednačine $\frac{x+3}{1-x} = 1$, odakle sledi da je nula funkcije $x = -1$. Odredimo znak funkcije.

	$(-3,-1)$	$(-1,1)$
$f(x)$	$-$	$+$

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{4}{(x+3)(1-x)}, \quad x \in (-3, 1).$$

Prvi izvod nema nula.

Lako se može videti da je $f'(x) > 0$ za svako $x \in D$, a to znači da je funkcija monotono rastuća na čitavom domenu D.

Ekstremnih tačaka ne može biti.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{8x+8}{(x+3)^2(1-x)^2}, \quad x \in D$$

Odredimo znak drugog izvoda:

$$f''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; 8x + 8 > 0 \;\wedge x \in D \;\Leftrightarrow\; x \in (-1, 1),$$

odnosno,

$$f''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-3, -1).$$

Dakle, funkcija f je konkavna ($\smile$) na intervalu $(-1, 1)$,a konveksna ($\frown$) na intervalu $(-3, -1)$.

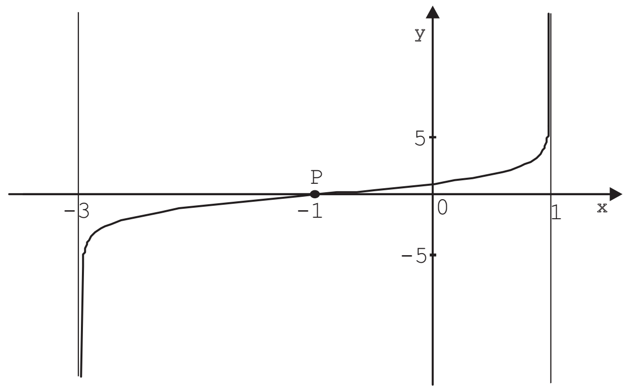
Tačka $P(-1, 0)$ je prevojna tačka grafika funkcije f.

- Asimptote.

Funkcija f ima dve vertikalne asimptote $x = -3$ i $x = 1$, jer je

$$\lim_{x\to -3^+} \ln \frac{x+3}{1-x} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 1^-} \ln \frac{x+3}{1-x} = +\infty.$$

Funkcija nema kosu asimptotu, pošto je domen funkcije interval $(-3, 1)$, tako da argument x ne može da teži ka $+\infty$ ili $-\infty$, što je potrebno za postojanje kose asimptote.



Slika 11.7: Grafik funkcije $f(x) = \ln \frac{x+3}{1-x}$.

8. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = \sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{4}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R}$.
- Funkcija f je periodična sa osnovnim periodom π (važi $f(x+\pi) = = f(x),\ x \in D$). Zato je dovoljno da je posmatramo na intervalu $[0, \pi]$.
- Nule funkcije f se odrede iz $f(x) = 0$, odnosno

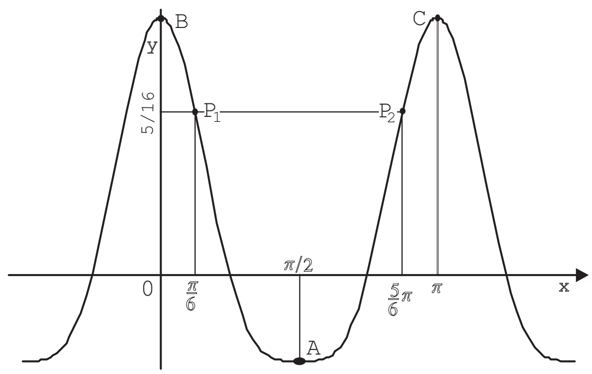
$$\sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{4} = 0,$$

uvedemo smenu $t = \sin^2 x$. Dakle, imamo jednačinu

$$t^2 - 2t + \frac{3}{4} = 0$$

čija su rešenja $t_1 = \frac{3}{2}$ i $t_2 = \frac{1}{2}$. Pošto $\sin^2 x \neq \frac{3}{2}$, rešenja dobijamo iz $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, odnosno $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nule fukcije f na $x \in [0, \pi]$ su $x = \frac{\pi}{4}$ i $x = \frac{3\pi}{4}$.
Odredimo znak funkcije.

	$(0, \frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4}, \pi)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$



Slika 11.8: Grafik funkcije $f(x) = \sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{4}$.

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = -4\sin x \cdot \cos^3 x, \;\; x \in D.$$

Nule prvog izvoda se dobijaju iz

$$-4\sin x \cdot \cos^3 x = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin x = 0 \,\vee\, \cos x = 0.$$

Iz ovoga sledi da su tačke $x = 0$, $x = \pi$ i $x = \frac{\pi}{2}$ nule prvog izvoda na posmatranom intervalu, ujedno i sve kritične tačke.

Odredimo znak prvog izvoda.

	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija ima lokalni minimum u tački $A(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{4})$ i lokalne maksimume u tačkama $B(0, \frac{3}{4})$ i $C(\pi, \frac{3}{4})$.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = -4\cos^4 x \left(1 - 3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right), \;\; x \in D \setminus \{\frac{\pi}{2}\}.$$

Funkcija je konkavna ako je $f''(x) > 0$, odnosno ako je

$$1 - 3\text{tg}^2 x < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-1}{\sqrt{3}} > \text{tg}\, x > \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

Funkcija je konveksna ako je $f''(x) < 0$, odnosno za $x \in (0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \pi)$. Iz prethodna dva razmatranja da se zaključiti da su $P_1(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{16})$ i $P_2(\frac{5\pi}{6}, \frac{5}{16})$ prevojne tačke funkcije f.

- Asimptote.

  Funkcija je definisana i neprekidna nad $\mathbf{R}$, te nema vertikalnih asimptota.

  Funkcija f nema kosu asimptotu, jer n ne postoji:

$$n = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{4}).$$

9. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f određujemo iz uslova

$$-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1.$$

  Iz toga sledi

$$-1 - x^2 \le 2x \ \wedge\ 1 + x^2 \ge 2x \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 \ge 0 \ \wedge\ (1-x)^2 \ge 0,$$

  što je zadovoljeno za svako $x \in \mathbf{R}$. Dakle, domen funkcije f je $D = \mathbf{R}$.
- Funkcija je neparna. Zaista,

$$f(-x) = -x + \arcsin\frac{-2x}{1+x^2} = -x - \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = -f(x),$$

  Tako da je dovoljno ispitati tu funkciju samo za $x \ge 0$.
- Iz

$$f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0,$$

  sledi da je $x = 0$ jedina nula funkcije f.
- Prvi izvod funkcije je

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 1 + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|}.$$

  Vidimo da f' nije definisana u $x = 1$. Oslobodimo se znaka apsolutne vrednosti,

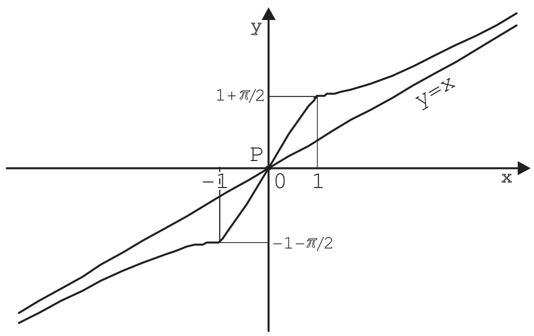
$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{1+x^2}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{x^2-1}{1+x^2}, & x > 1. \end{cases}$$

  $f'(x) > 0$ za svako $x \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$. Što znači da funkcija f raste za svako $x \in \mathbf{R}^+$, a zbog neparnosti i nad celim $\mathbf{R}$. Ekstremnih tačaka nema. Ispitajmo još levu i desnu graničnu vrednost od f' u tački $x = 1$,

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(1 - \frac{2}{1+x^2}\right) = 0, \quad \alpha_1 = \operatorname{arctg} 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(1 + \frac{2}{1+x^2}\right) = 2, \quad \alpha_2 = \operatorname{arctg} 2 \approx 63.43^\circ.$$

α_1 i α_2 su odgovarajući uglovi koje tangente grafika u tački $x = 1$ zaklapaju sa pozitivnim delom x-ose. Ovi podaci omogućavaju preciznije crtanje grafika funkcije. Primetimo da u tački $x = 1$ funkcija f je neprekidna ali nije diferencijabilna.



Slika 11.9: Grafik funkcije $f(x) = x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

- Drugi izvod funkcije je

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{(1+x^2)^2}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x > 1. \end{cases}$$

Analizirajmo znak drugog izvoda:

	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	konveksna ($\frown$)	konkavna ($\smile$)

Tačka $P(0,0)$ je jedina prevojna tačka grafika funkcije. U tačkama $x = 1$ i $x = -1$ prvi izvod ne postoji te ne mogu biti prevojne tačke, iako drugi izvod menja znak prolazeći kroz te tačke.

- Asimptote.

Kako je f neprekidna nad $D = \mathbf{R}$, vertikalnih asimptota nema.

Ispitajmo postojanje kose asimptote,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}}{x}\right) = 1 + 0 = 1,$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}(x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} - x) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

Dakle, prava $y = x$ je kosa asimptota.

10. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nule funkcije f se određuju iz $f(x) = 0$, odnosno

$$\operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + \frac{1}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 1 = 0.$$

Dakle, $x = -1$ je nula funkcije.

$$f(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + \frac{1}{x} > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x+1}{x} > 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (x > 0 \quad \vee \quad x < -1) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty).$$

Prikažimo to u tablici:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (1 + \frac{1}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{2x^2 + 2x + 1}.$$

Diskriminanta od $2x^2 + 2x + 1 = 0$ je $a^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$ i $a = 2$, te sledi da je trinom $2x^2 + 2x + 1 > 0$ za savko $x \in D$. To znači da je $f'(x) < 0$ za svako $x \in D$, tj. $f(x)$ monotono opada nad čitavim domenom D. Ekstremnih vrednosti nema.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2}, \quad x \in D.$$

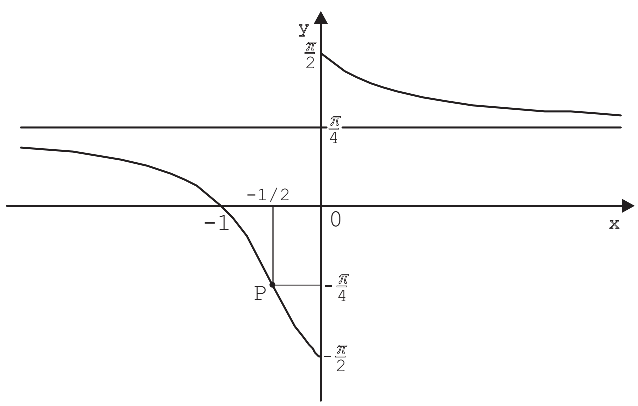
Nule drugog izvoda:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x+2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2}.$$

Dakle, $x = -\frac{1}{2}$ je jedina nula drugog izvoda i moguća prevojna tačka. Odredićemo znak drugog izvoda:

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	konveksna ($\frown$)	konkavna ($\smile$)	konkavna ($\smile$)

$P(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4})$ je prevojna tačka grafika funkcije.



Slika 11.10: Grafik funkcije $f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

- Asimptote.

Funkcija nema vertikalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\frac{\pi}{2} \tag{11.2}$$

i

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}. \tag{11.3}$$

Ispitaćemo da li funkcija ima horizontalnu asimptotu. Iz

$$\lim_{x\to \pm\infty} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$$

sledi da je prava $y = \frac{\pi}{4}$ horizontalna asimptota funkcije f.

- Kako važi (11.2) i (11.3), odredićemo još ugao α koji tangenta grafika funkcije f kada $x \to 0^{\pm}$ zaklapa sa pozitivnim delom x-ose.

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{-1}{2x^2+2x+1} = -1 \;\Rightarrow\; \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

Zadaci za samostalni rad

1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije f, ako je

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1}$. *b)* $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x^2+1}$.

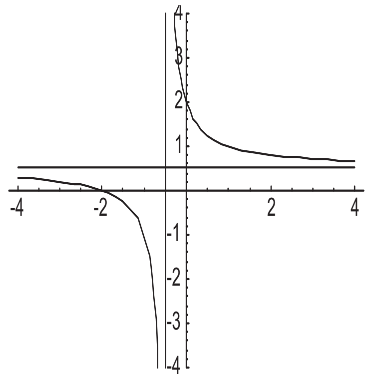
c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$. *d)* $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$.

e) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-x}$. *f)* $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}$.

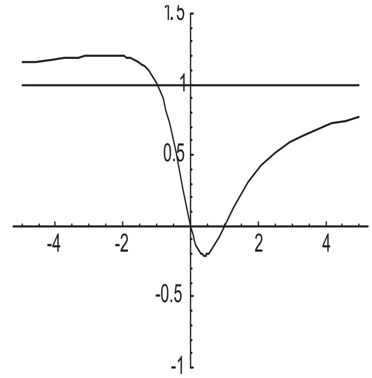
g) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. *h)* $f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

i) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$. *j)* $f(x) = \operatorname{arctg}\,(e^x) - \ln\left(\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}\right)$.

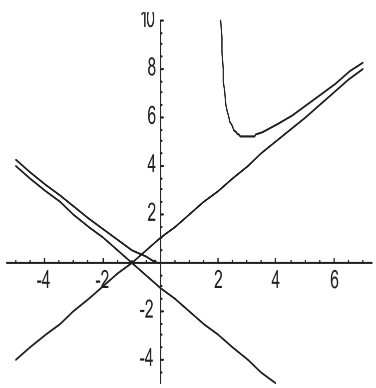
Grafici funkcija:



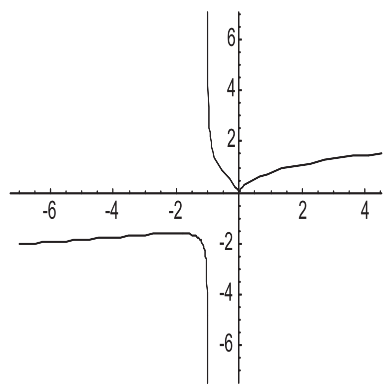
$a)$.



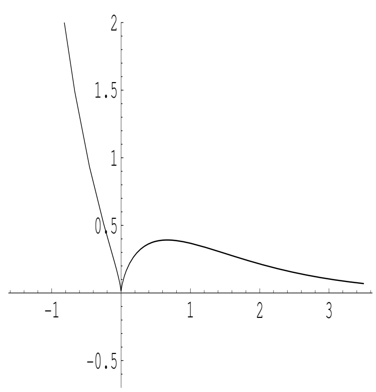
$b)$.



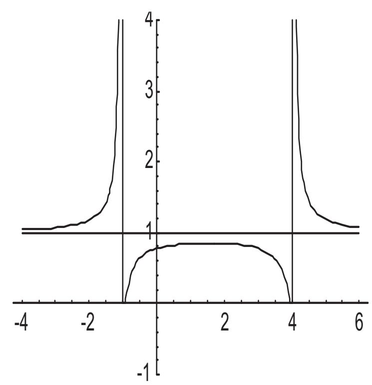
$c)$.



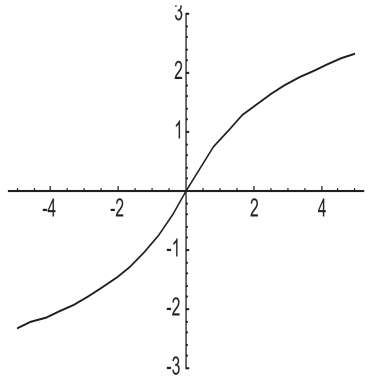
$d)$.



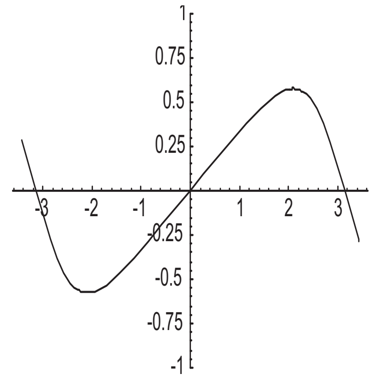
$e)$.



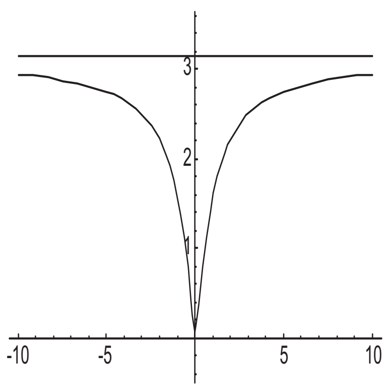
$f)$.


3
2
1
-4
-2
2
4
-1
-2
-3

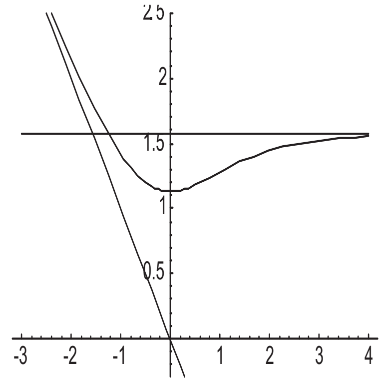
$g)$.


1
0.75
0.5
0.25
-3
-2
-1
1
2
3
-0.25
-0.5
-0.75
-1

$h)$.


3
2
1
-10
-5
5
10

$i)$.


2.5
2
1.5
1
0.5
-3
-2
-1
1
2
3
4

$j)$.